
Aufgaben zur Elektrodynamik

Blatt 10

SS 2009 · Abgabe: 16.07.2009

Aufgabe 1. Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Im Laborsystem K bewegt sich eine Punktladung e mit konstanter Geschwindigkeit v in x -Richtung. K' bezeichnet das mitbewegte Bezugssystem, in welchem die Ladung im Koordinatenursprung ruht. Zur Zeit $t = 0$ fällt der Ursprung von K mit dem von K' zusammen.

1a) Das Viererpotential einer statischen Punktladung wird als bekannt vorausgesetzt und hat die Form (in K')

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r'}, \quad \vec{A}' = \vec{0}. \quad (1)$$

Transformieren Sie dieses Potential in das ungestrichene System und drücken Sie das Ergebnis durch die ungestrichenen Koordinaten aus.

Hinweis: Es empfiehlt sich, die Länge r^* zu verwenden

$$(r^*)^2 := (x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2). \quad (2)$$

1b) Die elektrische und magnetische Feldstärke im mitbewegten System ist gegeben durch

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}'\Phi' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{B}' = \vec{0}. \quad (3)$$

Transformieren Sie \vec{E}' und \vec{B}' ebenfalls in das System K .

1c) Kontrollieren Sie das Ergebnis von Teilaufgabe b) anhand von Lorentz-invarianten Größen, die man aus \vec{E}' und \vec{B}' bilden kann ($\vec{E}' \cdot \vec{B}'$ und $E'^2 - B'^2$).

1d) Wie verlaufen die elektrischen und magnetischen Feldlinien einer bewegten Ladung? Wie sehen die Felder im ultrarelativistischen Grenzfall ($\beta \rightarrow 1$) aus? Bestimmen Sie die Form der Äquipotentialfläche $\Phi = \text{konst.}$ Warum steht das elektrische Feld nicht senkrecht darauf?

1e) Integrieren Sie das Magnetfeld im Laborsystem $\vec{B}(t)$ über die Zeit. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Magnetfeld eines geradlinigen "Gleichstromfadens" entlang der x -Achse, gegeben durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{y^2 + z^2} (0, -z, y)^T \quad (4)$$

(Biot-Savart Gesetz). Wie kann man die Übereinstimmung physikalisch verstehen?

Hinweis: $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

Aufgabe 2. Quasistationäre Näherung

2a) Welcher Term der Maxwell-Gleichung wird in quasistationärer Näherung für die Spule vernachlässigt?

2b) Wie hängt er mit der zeitlichen Variation der Ladungsdichte zusammen?

2c) Zeigen Sie, dass sich für "alltägliche Wechselstromkreise" die Ladungsdichte in einer Zeit $\Delta t = \frac{d}{c}$, die das Licht benötigt, um die Abmessung d der Spule zu durchlaufen (und also Retardierungseffekte wichtig werden), nur wenig ändert.

2d) Welcher Term der Maxwellgleichung wird in der quasistationären Näherung für den Kondensator vernachlässigt?

2e) Nähern Sie räumliche Ableitungen wie $|\vec{\nabla} \times \vec{X}| \sim \frac{X}{d}$, benutzen Sie die inhomogene Maxwell-Gleichung für den hier vorliegenden Fall ($\vec{j} = 0$), um den vernachlässigten Term mit dem Begleitenden in der homogenen Maxwell-Gleichung zu vergleichen und zeigen Sie, dass die Näherung in "alltäglichen Situationen" gerechtfertigt ist.