Übungen zur Elektrodynamik
Übung 09

SS 2009 · Termin: 09.07.2009

1 Indexschubsereien (=Tensorkalkül)

$T^{\mu\nu\rho}$, $F^{\mu\nu}$, und x^μ sind im Folgenden Tensoren, $\Lambda^\mu{}_\nu$ beschreibt eine Lorentztransformation, $\eta_{\mu\nu}$ ist die Metrik des Minkovski-Raums.

a) Setzen Sie die folgenden Größen mit der Metrik $\eta_{\mu\nu}$ in Beziehung:
x^μ und x_μ, $F^\mu{}_\nu$ und $F_\mu{}^\nu$, $T^\mu{}_\nu{}^\rho$ und $T_\mu{}^\nu{}_\rho$.

b) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
$\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\alpha}x_\alpha\eta_{\mu\rho}x_\sigma$, $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}$, $\partial_\mu\eta^{\mu\rho}x_\rho$.

c) Die Lorentztransformation verbindet zwei Inertialsysteme IS' und IS gemäß $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Drücken Sie folgende gestrichenen Größen durch die zugehörigen ungestrichenen Größen aus: $F'_{\mu\nu}$, $\partial'_\mu F'^{\mu\nu}$, $F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}$. Drücken Sie nun die ungestrichenen Größen x^μ, $F_{\mu\nu}$, und $T^\mu{}_\nu{}^\rho$ durch die entsprechenden gestrichenen Größen aus.

d) Zeigen Sie, dass die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ invariant unter Lorentztransformationen ist.

e) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentztransformation ist.

f) Berechnen Sie $\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}$ und $\frac{\partial(\partial^\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}$.

2 Transformation der Felder

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + c\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}.\mathbf{E})$$
$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}.\mathbf{B})$$

a) Wie transformieren sich die Feldkomponenten parallel zur Boostrichtung $\boldsymbol{\beta}$?

b) Wie sieht die Transfromation der Felder im nicht-relativistischen Grenzfall $\beta \ll 1$ aus?

c) Wenn in einem Inertialsystem kein Magnetfeld existiert wie sieht dann in einem geboosteten System der Zusammenhang von **E** und **B** aus?

freiwillig **d)** Prüfen Sie die Invarianz von $E^2 - c^2 B^2$ und $\mathbf{E}.\mathbf{B}$.

3 Energie-Impuls-Tensor

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
\tilde{\Theta}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\
\Theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} F^\nu{}_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

a) Was ist $F^\nu{}_\alpha$, ausgedrückt durch A-Felder?

b) Zeigen Sie, dass $\tilde{\Theta}^{\mu\nu} - \Theta^{\mu\nu} = \partial_\alpha X^{\alpha\mu\nu}$ mit $X^{\alpha\mu\nu}$ antisymmetrisch in (α, μ) ist. Was ist $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}$ und $\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu}$?

c) Zeigen Sie, dass $\Theta^{\mu\nu}$ symmetrisch ist.

d) Zeigen Sie, dass $\Theta^\mu{}_\nu$ spurlos ist.

e) Was ist $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}$ bei vorhandenen Strömen j^ν? Erst (qualifiziert) raten, dann rechnen.