Lösungen zur 2. Klausur Elektrodynamik

23.07.2009

(Nicht jede der folgenden Bemerkungen war erforderlich.)

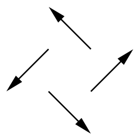
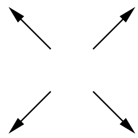
1. Felder u.a.

(a) Gibt es (lokal) ein Magnetfeld konstanter Richtung, das (nur) senkrecht dazu zunimmt? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an, wenn nein, begründen Sie dies! *2 Punkte*

z.B. $\vec{B} = \vec{e}_z B(x, y)$, steht nicht im Widerspruch zur hom. Maxwell-Gleichung, denn $\operatorname{div} \vec{B} = 0 + 0 + \partial_z B(x, y) = 0$ (und in der inhom. Maxwellgleichung tritt noch $\vec{E}$ auf)

ja, möglich, z.B. zwei ineinandergesteckte unendliche Spulen bzw. unendliche Spule mit in senkrechter Richtung verbreiterter Drahtfläche

(b) Unter welchen physikalischen Umständen existieren die folgenden Felder als $\vec{E}$-Felder in der Elektrodynamik? *2 Punkte*

rechts: ja, z.B. mit (positiver) Ladung (z.B. Punktladung) im eingeschlossenen Volumen

links: ja, z.B. mit zeitlich variablem magnetischem Fluss, s. Induktionsspannung in Drahtschleife

(c) Wie lauten Rotation und Divergenz (in kartesischen Koordinaten) in Komponentenschreibweise? *1 Punkt*

$(\vec{\text{rot}}\vec{v})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$

$\vec{\text{rot}}\vec{v} = \vec{e}_x(\partial_y v_z - \partial_z v_y) + \vec{e}_y(\partial_z v_x - \partial_x v_z) + \vec{e}_z(\partial_x v_y - \partial_y v_x)$ [ein Vektor!]

$\text{div}\vec{v} = \sum_j \partial_j v_j = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$ [eine Zahl!]

Schließen Sie daraus auf die Anzahl der Terme auf der linken (d.h. der Feld-) Seite der inhomogenen Maxwell-Gleichungen und diskutieren Sie das Ergebnis anhand des Feldstärketensors! *2 Zusatzpunkte*

bei der Rotation in der Vektor-Maxwellgleichung gibt es für jede Komponente 2 Terme, geht mit ∂_t zusammen: 3 Terme

bei der Divergenz in der skalaren Maxwell-Gleichung gibt es 3 Terme

in der Feldstärketensor-Schreibweise $\sum_{\mu=1}^{4} \partial_\mu F^{\mu\nu}$ gibt es (für jede Komponente ν) scheinbar 4 Terme, aber der Term $\mu = \nu$ tritt nicht auf, da F antisymmetrisch ist, $F^{\mu\mu} = 0$ (keine Summe): 3 Terme ✓

(d) Unter welchen Umständen kann der duale Feldstärketensor einer Lösung der Maxwell-Gleichungen gleich dem Feldstärketensor sein? *2 Punkte*

aus der Darstellung mit A^μ, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, folgen immer die homogenen Maxwell-Gleichungen $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

wenn nun $F = \tilde{F}$, dann auch $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, das sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen, aber mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$, d.h. ohne Ladungen und Ströme bzw. im Vakuum

alternativ: $F = \tilde{F}$ bedeutet $\vec{E} = c\vec{B}$ und dann folgen aus den homogenen Maxwell-Gleichungen die inhomogenen mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$

(e) Geben Sie zwei Potentiale an, die helfen, die Gleichungen der Magnetostatik außerhalb der Quellen zu lösen! *2 Punkte*

für statische Fälle und $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ erfüllt das magn. Feld div $\vec{B} = 0$ *und* rot $\vec{B} = 0$ ($\vec{E}$ übrigens auch), was durch die möglichen Potential-Darstellungen gelöst wird: $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$ bzw. $\vec{B} \sim \vec{\text{grad}}\Phi_M$ (ähnlich wie $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,\Phi$, s.a. Übung 07/1)

(f) Drücken Sie den Kopplungsterm der Elektrodynamik $j_\mu A^\mu$ in Komponenten aus und begründen Sie, warum er in allen Inertialsystemen gleich ist! *2 Punkte*

Def.en: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, $A^\mu = (\Phi/c, \vec{A})$

um j_μ zu erhalten, muss man mit $\eta_{\mu\nu}$ den Index herunterziehen $\Rightarrow$ Minus für räumliche Komponenen: $j_\mu A^\mu = \rho\Phi - \vec{j}\vec{A}$ (c's kürzen sich)

Lorentz-Invariante, denn $j'_\mu = \bar{\Lambda}^\nu_\mu j_\nu$ (inverse Transformation), $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$, also $j'_\mu A'^\mu = j_\nu \bar{\Lambda}^\nu_\mu \Lambda^\mu_\rho A^\rho = j_\nu \delta^\nu_\rho A^\rho = j_\nu A^\nu = j_\mu A^\mu$ ✓

(g) Geben Sie je eine Lorentz-Transformation an, unter denen die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder ineinander transformieren bzw. nicht ineinander transformieren! *2 Punkte*

Lorentz-Boost transformiert i.A. $\vec{E}$ in $\vec{B}$ und umgekehrt

räumliche Drehung transformiert diese nicht ineinander; dgl. Lorentz-Boost und beide Felder parallel zur Richtung der Boost-Geschwindigkeit (dann $\vec{\beta} \times \vec{E} = \vec{\beta} \times \vec{B} = 0$, s.a. Übung 09/2)

2. Spezielle Feldkonfiguration

Gegeben sei das folgende Feld:

$$\vec{X} = \begin{cases} p'' \frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} & x < 0 \\ p \frac{\vec{r}+\vec{a}}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} + p' \frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} & x > 0 \end{cases},$$

wobei p, p', p'' zunächst beliebige Konstanten sind und $\vec{a} = a\vec{e}_x$ ein Vektor mit $a > 0$.

(a) Welches sind die Quellen des Feldes? Um welche Felder der Elektrodynamik könnte es sich handeln? *2 Punkte*

Quell(stärk)e: div berechnen, gibt hier formal 0, aber Singularität wir wissen aber : $(\vec{r}-\vec{a})/|\vec{r}-\vec{a}|^3$ ist das Feld einer Punktladung bei $\vec{r}=\vec{a}$, d.h.

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} = \operatorname{div}(-\vec{\operatorname{grad}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}) = -\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{a}) \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}+\vec{a}}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} = \operatorname{div}(-\vec{\operatorname{grad}}\,\frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|}) = -\Delta\frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|} = 4\pi\delta(\vec{r}+\vec{a}) \tag{2}$$

der p''- und p'-Term führen auf eine Punktquelle bei $\vec{r}=\vec{a}$, also $x=a>0$ (nach Voraussetzung): p''-Term hat keine Quellen, da $x<0$

analog führt der p-Term auf eine Punktquelle bei $\vec{r}=-\vec{a}$, also $x=-a<0$ (nach Voraussetzung): p-Term hat keine Quellen, da $x>0$

also $\operatorname{div}\vec{X} = 4\pi p'\delta(\vec{r}-\vec{a})$ nur eine Quelle im rechten Gebiet (Punktladung), die anderen Quellen sind Spiegelladungen

Feld hat Quellen: kann nur $\vec{E}$ oder $\vec{D}$ sein

(b) Geben Sie die allgemeinen Randbedingungen einer Grenzfläche bei $x=0$ an unter der Annahme, dass sich dort keine externen Ladungen oder Ströme befinden! *2 Punkte*

ohne Ladungen und Ströme sind Normalkomponente des D-Feldes und Tangentialkomponente des E-Feldes stetig (analog für $\vec{B}$ und $\vec{H}$)

(c) Lösen Sie mit Hilfe von (b) die Gleichungen für p und p'' als Funktion von p' (für einen der in (a) gefundenen Fälle)!

Führen Sie den Grenzfall $p=0$ durch (p' soll dabei nicht verschwinden) und diskutieren Sie ihn! *4 Punkte*

bei $x=0$ sind Normal-, d.h. x- und Tangential-, d.h. z.B. y-Komponenten von X zu bestimmen:

$$\vec{n}\cdot\vec{X}|_{x=0} = \begin{cases} \frac{-p''a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3} \sim -p'' & x<0 \\ \frac{pa-p'a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3} \sim p-p' & x>0 \end{cases} \tag{3}$$

$$X^{\|}|_{x=0} = \begin{cases} \frac{p''y}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3} \sim p'' & x<0 \\ \frac{py+p'y}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3} \sim p+p' & x>0 \end{cases} \tag{4}$$

Fall (A): $X=E$ [s. a, Fliessbach mit p's ersetzt durch q's ...]

Stetigkeit von $E^{\|}$: $p+p'=p''$

Stetigkeit der Normalkomponenten von $\vec{D}=\epsilon_0\epsilon\vec{E}=\epsilon_0\epsilon\vec{X}$: $\epsilon_r(p-p')=-\epsilon_l p''$ (l meint links, $x<0$)

Fall (B): $X=D$

Stetigkeit von $\vec{n}\cdot\vec{D}$: $p-p'=-p''$

Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{E}=\vec{D}/\epsilon_0\epsilon=\vec{X}/\epsilon_0\epsilon$: $\frac{p+p'}{\epsilon_r}=\frac{p''}{\epsilon_l}$

beide (!) Fälle führen nach Umstellen auf

$$p = \frac{\epsilon_r - \epsilon_l}{\epsilon_r + \epsilon_l} p' \tag{5}$$

bzw. unterscheiden sich hier:

$$p'' = \frac{2\epsilon_{r,l}}{\epsilon_r + \epsilon_l} p' \tag{6}$$

mit Hilfe der Spiegelladungen hat man also das Problem "Punktladung (in einem dielektrischen Medium) vor einem dielektrischen Medium" gelöst

Grenzfall $p = 0$:

$\epsilon_l = \epsilon_r$, d.h. kein Übergang, d.h. gleiches Medium, $p'' = p'$: Feld hat links und rechts gleiche Form (Fallunterscheidung könnte weggelassen werden)

3. Magnetfeld und Ströme

Betrachten Sie zwei *kreisrunde, konzentrische* Drahtschleifen mit den Radien R_1 und R_2, durch die gleichgerichtet Ströme I_1 und I_2 fließen.

(a) Welche Beziehung muss gelten, damit beide Schleifen dasselbe magnetische Dipolmoment erzeugen? *1 Punkt*

mit Drahtschleife in (x, y)-Ebene: $\vec{m} = (0, 0, \pi I R^2)^T$, also $I_1 R_1^2 = I_2 R_2^2$, d.h. Strom nimmt quadratisch mit Radius ab

(b) Skizzieren Sie das magnetische Feld und diskutieren Sie es qualitativ zwischen den Schleifen! *2 Punkte*

Kreise um die Schleifen ($\vec{B}$ enstpricht Bündel von Ähren, Stromschleife einem Band, das sie zusammenbindet)

wegen der unterschiedlichen Orientierung der $\vec{B}$-Feldlinien außerhalb und innerhalb der einzelnen Schlleife kommt es zwischen den zwei Schleifen zu Kompensationseffekten

(c) Berechnen Sie das $\vec{B}$-Feld auf der Symmetrieachse! *5 Punkte*

$\vec{B}(0, 0, z) \sim \vec{e}_z$ mit Biot-Savart ausrechnen, s. Übung 06/2

addieren sich = Verstärkung, Details:

$$\vec{r} = z\vec{e}_z \qquad \vec{r}\,' = R_i \vec{e}_\rho \qquad d\vec{r}\,' = R_i d\varphi \vec{e}_\varphi$$
$$d\vec{r}\,' \times \left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) = R_i^2 d\varphi \vec{e}_z + R_i z d\varphi \vec{e}_\rho$$
$$\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3 = \sqrt{z^2 + R_i^2}^{\,3}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_i(z) &= \frac{\mu_o I_i}{4\pi}\int d\vec{r}\,' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \\
&= \frac{\mu_o I_i R_i^2}{4\pi\sqrt{z^2+R_i^2}^{\,3}}\int d\varphi \vec{e}_z + \ldots \underbrace{\int d\varphi \vec{e}_\rho}_{=0} = \\
&= \frac{\mu_0 I_i}{2}\frac{R_i^2}{\sqrt{z^2+R_i^2}^{\,3}}\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

$$\vec{B}_{ges} = \vec{B}_1\,(z) + \vec{B}_2\,(z)$$

4. Bessel-Welle

Gegeben sei der folgende Ansatz für ein skalares Potential in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi(t,\vec{r}) = \Phi_0\, e^{i(\omega t - kz)}\, J(\rho) \qquad \Phi_0 \in \mathbb{C}$$

(a) Diskutieren Sie dieses Potential, insbesondere in den Koordinaten (t,z) und ρ! *1 Punkt*

Welle in z-Richtung mit zeit- und winkelunabhängigem Profil in (x,y)-Richtung, d.h. senkrecht dazu (nicht zerfließend!)

(b) Werten Sie die Wellengleichung (in Lorenz-Eichung) als Bedingung an die noch zu bestimmende Funktion $J(\rho)$ aus!

$J(\rho)$ soll sich asymptotisch in führender Ordnung wie $\exp(i\rho/\xi)/\sqrt{\rho}$ verhalten. Welche Dispersionsrelation folgt daraus?

Was ist die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit? Vergleichen Sie mit c! *4 Punkte*

Wellengleichung $\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Phi - \Delta\Phi = 0$ gibt hier ($J' \equiv \partial_\rho J(\rho)$):

$$(-\frac{\omega^2}{c^2}+k^2)J - \frac{1}{\rho}J' - J'' = 0 \tag{7}$$

mit $J \sim \exp(i\rho/\xi)/\sqrt{\rho}$ ergibt sich:

$$J' = \frac{i}{\xi}\frac{e^{i\rho/\xi}}{\sqrt{\rho}} + O(\rho^{-3/2}) \qquad \frac{1}{\rho}J' = O(\rho^{-3/2}) \tag{8}$$

$$J'' = (\frac{i}{\xi})^2\frac{e^{i\rho/\xi}}{\sqrt{\rho}} + O(\rho^{-3/2}) \tag{9}$$

wobei nur die Terme führender Ordnung weiter berücksichtigt werden

also Lösung der Wellengleichung, nur wenn Koeffizient $-\frac{\omega^2}{c^2}+k^2-\frac{i^2}{\xi^2}$ vor $\exp(i\rho/\xi)/\sqrt{\rho}$ Null ist, d.h. Dispersionsrelation ist:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{1}{\xi^2} \quad \text{bzw.} \quad \omega = c\sqrt{k^2+1/\xi^2} \tag{10}$$

Phasengeschwindigkeit $v_P := \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + 1/\xi^2 k^2} > c$ kann sein

Gruppengeschwindigkeit $v_G := \frac{\partial\omega}{\partial k} = c\frac{k}{\sqrt{k^2+1/\xi^2}} < c$ muss sein (s.a. $v_G = c^2/v_P$)

(c) Machen Sie einen analogen Ansatz für das Vektorpotential $\vec{A}$ und geben Sie eine einfache Wahl der Amplituden an, welche die Lorenz-Eichung erfüllt! *2 Punkte*

Lorenz-Eichung: $\frac{1}{c^2}\,\partial_t\Phi + \operatorname{div}\vec{A} = 0$

es reicht, A_z einzuführen, $A_\varphi = A_\rho = 0$

mit Ansatz $A_z = A_{z0}\, e^{i(\omega t - kz)}\, J(\rho)$:

$$\partial_z A_z = -\mathrm{i}kA_{z0}e^{i(\omega t-kz)}\,J(\rho) = -\frac{1}{c^2}\,\partial_t\Phi = -\frac{1}{c^2}\,\mathrm{i}\omega\Phi_0 e^{i(\omega t-kz)}\,J(\rho) \tag{11}$$

also

$$A_{z0} = \frac{\omega}{kc^2}\Phi_0 \quad \text{bzw.} \quad A_z = \frac{\omega}{kc^2}\Phi = \frac{\omega}{kc^2}\Phi_0 e^{i(\omega t-kz)}\,J(\rho) \tag{12}$$

(d) In welche Richtungen zeigen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und sind sie transversal zur Ausbreitungsrichtung? Wie ist der Poynting-Vektor definiert und in welche Richtung zeigt er hier? *4 Punkte*

aus den Potentialen folgt:

$$\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}}\,\Phi - \partial_t\vec{A} \sim \vec{e}_z, \vec{e}_\rho, \quad \vec{B} = \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{A} \sim \vec{e}_\varphi, \quad \text{alle} \ \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tag{13}$$

$\vec{B}$ steht senkrecht auf $\vec{e}_z$, $\vec{E}$ nicht (s. TM-Wellen im Wellenleiter)

Def. $S = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$

gibt hier $\vec{S} \sim \vec{e}_z, \sim \vec{e}_\rho$

(ersteres als Impuls der Welle natürlich; letzteres unerwartet, aber mit einem reellen Ansatz für J [Asymptotik $\cos(\rho/\xi)/\sqrt{\rho}$] verschwindet dieser Anteil von $\vec{S}$ nach Zeitmittelung)

Hilfe: Vektorkalkül in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{\operatorname{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial\rho}\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \\
\operatorname{div} A &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\vec{\operatorname{rot}}\, A &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z \\
\Delta f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$