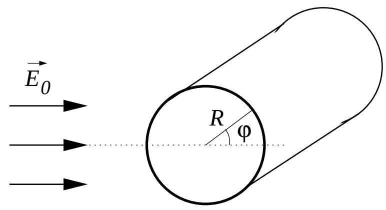
# 4. Übung

Besprechung: 14.11.05

Der Gebrauch von mathematischen Formelsammlungen und algebraischen Manipulationsprogrammen zur Problemlösung verstößt nicht gegen den Ehrencodex, sondern erspart Zeit und Arbeit. Sich von guten Lehrbüchern anregen zu lassen, ist nicht verkehrt, wenn es das eigene Nachdenken nicht ersetzt.
Aktuelle Informationen und pdf-Files der Übungen auch unter
*http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/lectures/ws2005_2006/griesshammer/EDkompakt.html.*

1. Zylinder im äusseren Feld: In ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_0$ wird ein ungeladener, geerdeter, unendlich langer Kreiszylinder mit Radius $R$ eingebracht, dessen Achse senkrecht zum Feld $\vec{E}_0$ steht, siehe Abbildung. Bestimmen Sie durch Konstruktion der geeigneten Greensfunktion, wie dies das elektrische Feld modifiziert.




**Hinweis**: Schlüsse analog zu Aufgabe 2.b) von Blatt 2 vereinfachen das Problem.

a) Identifizieren Sie die Symmetrien der Lösung und das geeignete Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Elementarlösungen der Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ in Zylinderkoordinaten für dieses Problem. Zeigen Sie dazu zunächst, daß der Separationsansatz (auch Produktansatz genannt) $\Phi(r,\phi,z) = U(r)\,\chi(\phi)$ zu den folgenden Differentialgleichungen führt:

$$\frac{r}{U(r)}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}U(r) = -\frac{1}{\chi(\phi)}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\chi(\phi) = \mu^2$$

Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Elementarlösungen für Separationskonstante $\mu = 0$.

c) Berechnen Sie Potential und elektrisches Feld außerhalb des Zylinders. Teillösung:

$$\Phi(r,\phi) = -|\vec{E}_0|\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\cos\phi$$

**Hinweis**: Im Unendlichen ist das Feld durch $\vec{E}_0$ gegeben. (Warum?)

d) Wie groß sind Potential und elektrisches Feld innerhalb des Zylinders? Interpretation und Feldskizze für $\Phi$ und $\vec{E}$ im Innen- und Außenraum!

e) Da das elektrische Feld innen und außen verschieden ist, wurde nach dem Gauß'schen Gesetz eine nichtverschwindende Ladungsdichte $\sigma_{\text{infl}}$ auf dem Zylinder influenziert. Zeigen Sie, daß diese durch die Normalkomponenten der elektrischen Feldstärke an der Zylinderoberfläche gegeben ist: $E_{n,\text{außen}} - E_{n,\text{innen}} = 4\pi\sigma_{\text{infl}}$. Berechnen Sie die influenzierte Ladungsverteilung, die Gesamtladung, und den Schwerpunkt von positiver und negativer Ladung, jeweils pro Längeneinheit.

2. Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen: Wir belegen ("beweisen")

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\Omega)\,Y_{lm}(\Omega') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{l0}(\alpha,0)$$

mit $\alpha$ der Winkel zwischen $(\theta,\phi)$ und $(\theta',\phi')$, d.h. $\cos\alpha = \cos\theta\,\cos\theta' + \sin\theta\,\sin\theta'\,\cos(\phi-\phi')$. Unten ist nur ein möglichen Beweisweg skizziert. Finden Sie einen anderen.

a) Entwickelt man zunächst $P_l(\cos\alpha) = \sum\limits_{L,m} A_{Lm}(\theta',\phi')\,Y_{Lm}(\theta,\phi)$, folgt daraus $L = l$.

**Hinweis**: Welchen Wert hat $\alpha$ für $\theta' = \phi' = 0$?

b) Entwickelt man nun $A_{lm}(\theta',\phi') = \sum\limits_{l',m'} a^{ll'}_{mm'}\,Y_{l'm'}(\theta',\phi')$, folgt daraus $l = l'$.

c) Zeigen Sie nun, daß $m = -m'$. **Hinweis**: $P_l$ ist eine Funktion von $\phi - \phi'$. [Warum?]

d) Wir wissen nun also, daß $P_l(\cos\alpha) = \sum\limits_{m=-l}^{l} C_{lm}\,Y_{lm}(\theta,\phi)^*\,Y_{lm}(\theta',\phi')$. Bestimmen Sie $C_{lm}$.