5. Übung

Besprechung: 21.11.05

Aktuelle Informationen und pdf-Files der Übungen auch unter
http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/lectures/ws2005_2006/griesshammer/EDkompakt.html.

1. DIPOLMOMENT DES HCl-MOLEKÜLS: In einem vereinfachten Modell entsteht ein HCl-Molekül durch Verbindung eines Wasserstoffatoms (Ladungszahl $Z = 1$) mit einem Chloratom ($Z = 17$), wobei das H-Atom ein Elektron an das Chlor-Atom abgibt. Die 18 Elektronen des Chlor-Ions bilden dann eine näherungsweise sphärische Wolke um den Cl-Kern. Die beiden Kerne sind $l = 1.28$ Å voneinander entfernt. Im Folgenden vergleichen wir das Dipolmoment dieses Moleküls mit dem experimentellen Wert $d = 1.03 \times 10^{-18}$ esu cm.

   a) Zeigen Sie, daß das Dipolmoment eines neutralen Objekts von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig ist.

   b) Beweisen Sie, daß das Dipolmoment einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}) = \rho_+(\vec{x}) + \rho_-(\vec{x})$ positiver und negativer Ladungen durch die gesamten positiven und negativen Ladungen und deren "Ladungs-Schwerpunkte" ausgedrückt werden kann.

   c) Berechnen Sie das Dipolmoment des HCl-Moleküls unter der Annahme, daß es sich aus zwei punktförmigen Ionen H^+ und Cl^- im Abstand l zusammensetzt. Vergleich zum Experiment!

   d) Wie weit muß der Schwerpunkt negativer Ladung vom Cl-Kern in Richtung zum Proton verschoben werden, damit das Dipolmoment den gemessenen Wert besitzt?

2. SYMMETRIEN VON MULTIPOLMOMENTEN: Gegeben eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung.

   a) Zeigen Sie, daß nur das niedrigste nichtverschwindende sphärische Multipolmomente koordinatenunabhängig definiert ist. (Siehe 1.a) oben.)

   b) Zeigen Sie, daß bei geschickter Wahl des Koordinatensystems die sphärischen Multipolmomente folgende Eigenschaften besitzen:

   (i) $\rho(\vec{x})$ rotationssymmetrisch bzgl. einer Achse $\Longrightarrow Q_{lm} = \delta_{m0}\, Q_{l0}$;

   (ii) $\rho(\vec{x})$ sphärisch symmetrisch $\Longrightarrow$ nur Monopolmoment ist nichtverschwindend.

   (iii) $\rho(\vec{x})$ spiegelsymmetrisch bzgl. einer Ebene $\Longrightarrow Q_{lm} = Q_{l-m}$;

3. KARTESISCHE UND SPHÄRISCHE MULTIPOLMOMENTE: Drei Ladungen sitzen auf einer Linie: $q_1 = -q$ bei $x_1 = (0, 0, a)$, $q_2 = -q$ bei $x_2 = (0, 0, -a)$, und $q_3 = 2q$ bei $x_3 = (0, 0, 0)$.
   Es gibt eine exakte Lösung:

   a) Berechnen Sie mithilfe des Superpositionsprinzips das exakte Potential $\Phi(\vec{x})$.

   Wir betrachten nun die *kartesische* Multipolnäherung desselben Problems.

   b) Berechnen Sie nun explizit die ersten drei *kartesischen* Multipolmomente (Monopol, Dipole und Quadrupole) bezüglich des Koordinatenursprungs. Symmetrieargumente!

   c) Konstruieren Sie daraus in dieser Näherung Potential und elektrisches Feld.

   Wir betrachten nun die *sphärische* Multipolnäherung desselben Problems.

   d) Berechnen Sie explizit *alle* sphärischen Multipolmomente bezüglich des Koordinatenursprungs. Symmetrieargumente!

   e) Konstruieren Sie Potential und elektrisches Feld, auch in sphärischer Quadrupolnäherung.

   f) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse zur Lösung von Aufgabe c) und zur exakten Lösung, Aufgabe a). Ab welchem Abstand vom Ladungsschwerpunkt wird die relative Differenz der Lösungen jeweils kleiner als z.B. 1%, z.B. entlang der positiven z-Achse?