1. Übung

Besprechung: 25.10.05

Aktuelle Informationen und pdf-Files der Übungen auch unter
http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/lectures/ws2005_2006/griesshammer/EDkompakt.html.

1. Div, Rot, Grad:

   a) Beweisen und interpretieren Sie mit $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, $\Delta = \vec{\nabla}^2$, Φ ein beliebiges Skalarfeld, $\vec{U}$ ein beliebiges Vektorfeld.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{r} = 0 \qquad \vec{\nabla}r = \vec{e}_r \qquad \mathrm{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{U}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{U}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}) - \Delta\vec{U} \qquad \vec{\nabla}\times(\Phi\vec{U}) = \Phi(\vec{\nabla}\times\vec{U}) + (\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{U}$$

   b) Wenn $\vec{U},\vec{V}$ beliebige, sowohl quellen- als auch wirbelfreie Vektorfelder sind, welche Quellen und Wirbel hat dann $\vec{U}\times\vec{V}$?

   c) Besitzen die folgenden Felder Quellen oder Wirbel? Skizzieren Sie die Felder.

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = x\,\vec{e}_y - y\,\vec{e}_x \qquad \vec{A}_2(\vec{x}) = x\,\vec{e}_y + y\,\vec{e}_x \qquad \vec{A}_3(\vec{x}) = \frac{1}{1+x^2}\,\vec{r}$$

2. Eigenschaften der δ-Distributionen

   a) Zeigen Sie: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

   b) Zeigen Sie: $\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x-x_i)}{|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)|}$ wenn $f(x)$ einfache Nullstellen bei $x = x_1,\dots,x_N$ besitzt.

   c) Berechnen Sie die "Ableitung der δ-Funktion"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) \quad .$$

3. Sätze von Gauß und Stokes:

   a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral über eine Würfel-, Kugel- und Torusoberfläche im Feld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$. Der Gauß'sche Satz erspart die explizite Rechnung. Zeichnen Sie $\vec{A}(\vec{r})$.

   b) Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz durch explizite Berechnung der relevanten Integrale über das Beispielfeld $\vec{A} = (x^2y, 2yz, 3xz)$, wobei die Integrationsfläche eine im Koordinatenursprung zentrierte Kreisscheibe mit Radius R is, die in der xy-Ebene liegt.