11. Übung

Besprechung: 16.1.06

Aktuelle Informationen und pdf-Files der Übungen auch unter
http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/lectures/ws2005_2006/griesshammer/EDkompakt.html.

1. STRAHLUNGSDRUCK DER SONNENSTRAHLUNG: Die von der Sonne ausgestrahlte Gesamtleistung beträgt 3.8×10^{26} W. Ein Anteil davon trifft im Abstand von $r = 1.5 \times 10^{11}$ m auf die Erde, auf die demzufolge ein Druck wirkt. Nehmen Sie an, daß sämtliche Strahlung absorbiert wird. (Erdradius $R = 6000$ km, mittlere Erddichte $\rho = 5.5$ g cm^{-3})

   a) Überprüfen Sie explizit den Zusammenhang zwischen Poynting-Vektor und Energiedichte für die ebene elektromagnetische Welle (A reell)

$$\vec{E} = A\,\vec{e}_x\ \cos[kz - \omega t]\ ,\ \ \vec{B} = A\,\vec{e}_y\ \cos[kz - \omega t]\ .$$

   Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der Energiedichte.

   c) Zeigen Sie: Das zeitgemittelte Magnetfeld der Sonnenstrahlung in Erdnähe beträgt 0.024 Gauß.

   d) Berechnen Sie die zeitgemittelte Kraft, die auf die Erde wirkt. Wie groß ist das Verhältnis von Gravitations- zu zeitlich gemittelter Strahlungskraft?

2. KLEIN-GORDON-FELD UND WELLENMECHANIK: In der Quantenmechanik gilt der Welle-Teilchen-Dualismus. Wir untersuchen nun spinlose Teilchen als komplexes Skalarfeld $\Phi(x^\mu)$ der Masse m, das an jedem Raum-Zeit-Punkt einen Real- und einen Imaginärteil besitzt, d.h. $\Phi = \Phi_R + \mathrm{i}\Phi_I$, und $\Phi^\dagger = \Phi_R - \mathrm{i}\Phi_I$ sein komplex konjugiertes. Seine Kopplung an Eichfelder wird durch die folgende (reelle) Lagrangedichte beschrieben:

$$\mathcal{L}_{\Phi,A} = \Big[(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\Phi\Big]^\dagger\ \Big[(\partial^\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A^\mu)\Phi\Big] - \Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Phi^\dagger\Phi\ -\ \frac{1}{16\pi c}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

   a) Zeigen Sie, daß die beiden Terme der "eich-kovarianten Ableitung" $D^\mu(x) := \partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu$ nur dann dieselben Einheiten besitzen, wenn $\hbar$ die Einheit einer Wirkung hat. In der Quantenmechanik wird $\hbar$ zum (reduzierten) Planck'schen Wirkungsquantum. $\frac{2\pi\hbar}{mc}$ ist also die de-Broglie-Wellenlänge eines Teilchens der Masse m, und $\big(\frac{mc}{\hbar}\big)^2\,\Phi^\dagger\Phi$ ist eine Wirkungsdichte.

   b) Überprüfen Sie, daß die Lagrangedichte invariant ist unter der folgenden Eichtransformation:

$$A^\mu(x) \to A^{\mu\prime}(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)\ \ ,\ \ \Phi(x) \to \Phi'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\,f(x)}\ \Phi(x)$$

   D.h. zusätzlich zur bekannten Transformation von A^μ wird Φ mit einem beliebigen, ortsabhängigen Phasenfaktor multipliziert.

   Hinweis: Zeigen Sie $(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\Phi \to \exp[-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\ f(x)]\ (\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\Phi$ unter Eichtransformationen, d.h. die eich-kovariante Ableitung transformiert sich als

$$D^\mu(x) \to D^{\mu\prime}(x) = \exp[-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\ f(x)]\ D^\mu(x)\ \exp[+\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\ f(x)]\ .$$

   c) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in dieser Theorie? Welchen Ausdruck finden Sie für den erhaltenen Strom j^μ des Feldes Φ?

   Die Bewegungsgleichungen der unabhängigen Felder Φ und $\Phi^\dagger$ sind gegeben durch [Warum?]

$$(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\ (\partial^\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A^\mu)\Phi = -\Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Phi\ \ ,\ \ (\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\ (\partial^\mu - \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A^\mu)\Phi^\dagger = -\Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Phi^\dagger\ .$$

   d) Zeigen Sie: Wenn $\Phi(x)$ eine Lösung der obigen Bewegungsgleichungen im Eichpotential $A^\mu(x)$ ist, dann ist $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}f(x)}\ \Phi(x)$ die Lösung im eichtransformierten Feld $A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$.

   e) Wir fordern – wie schon für die Feldstärken –, daß nur eichinvariante Größen beobachtbar sein sollen. Ist dann die Phase von Φ, oder seine Intensität $|\Phi|^2$ beobachtbar? Unter welchen Umständen könnte man Eichfelder direkt nachweisen, obwohl z.B. die Feldstärken verschwinden? Dazu auf dem nächsten Übungsblatt mehr.