12. Übung

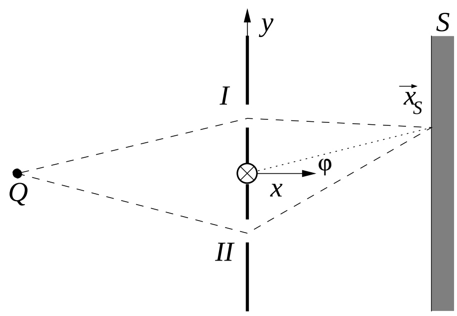
Besprechung: 23.1.06

Aktuelle Informationen und pdf-Files der Übungen auch unter
http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/lectures/ws2005_2006/griesshammer/EDkompakt.html.

1. Aharonov-Bohm Effekt (1959), vereinfachte Version: Eichpotentiale sind in der Kontinuumsmechanik (also wenn man statt mit Massepunkten mit Feldern arbeitet) "fundamentaler" als die elektrischen und magnetischen Feldstärken. Die einzigen makroskopisch beobachtbaren, also klassisch behandelbaren, Felder sind aber die elektromagnetischen und das Gravitationsfeld. Sie wissen jedoch aus den Grundvorlesungen, daß man in der Quantenmechanik und Optik auch z.B. Elektronen als Felder ("Materiewellen") beschreibt.

   Für den experimenteller Nachweis des im Folgenden beschriebenen Effektes durch Chambers 1960, verbessert von Tonomura 1983, wurden Elektronen benutzt. Deren Spin spielt dabei keine Rolle. Wir können für die Materiewellen der Elektronen also das an das elektromagnetische Feld gekoppelte Klein-Gordon-Feld aus Blatt 11, Aufgabe 2, verwenden und wieder pseudo-klassisch argumentieren.

   In der Mitte zwischen den Schlitzen eines Doppelspaltexperiments befindet sich zu diesen parallel auf der z-Achse ein unendlich langer, infinitesimal dünner Solenoid ($\otimes$). Das Feld $\Psi(\vec{r})$ der von der Quelle Q zum Schirm S "fließenden" Elektronen dringt nicht in den Solenoid ein. Ein magnetisches Feld mit Fluß Φ_{mag} ist auf das Innere des Solenoids beschränkt, wirkt also nicht in dem den Elektronen zugänglichen Außenraum, siehe Abbildung. Das Problem ist statisch.



   a) Zeigen Sie, daß das Vektorpotential in Zylinderkoordinaten im Außenraum

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_\varphi \, \frac{\Phi_{\mathrm{mag}}}{2\pi r}$$

   das Magnetfeld beschreibt: Feldfrei im Außenraum des Solenoids, Fluß Φ_{mag} im Innenraum.

   b) Zeigen Sie, daß die vom Magnetfeld auf *punktförmige* Elektronen klassisch wirkende Kraft verschwindet.

   c) Schreiben Sie das Vektorpotential im Außenraum als Gradient einer skalaren Funktion $\chi(\vec{r})$. Unter welchen Umständen ist $\chi(\vec{r})$ im Außenraum eine überall eindeutige (und auch stetig differenzierbare) Funktion der Koordinaten?

   Wir betrachten nun die *quantenmechanische* Version, beschreiben also die Elektronen als *Materiewellen.* Wie Sie wissen, erscheint in der Quantenmechanik und Optik in Abwesenheit des Vektorpotentials am Punkt $\vec{r}_S$ des Schirms S ein Interferenzmuster, das aus der linearen Superposition der vom Spalt I und Spalt II ausgehenden Materiewellen/Wellenfuntionen $\Psi_{I,\Phi_{\mathrm{mag}}=0}(\vec{r}_S)$ und $\Psi_{II,\Phi_{\mathrm{mag}}=0}(\vec{r}_S)$ erzeugt wird.

   d) Zeigen Sie für den Fall $\Psi_{II,\Phi_{\mathrm{mag}}=0}(\vec{r}_S) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\vec{x}_S)}\,\Psi_{I,\Phi_{\mathrm{mag}}=0}(\vec{x}_S)$, daß das Interferenzmuster die Form besitzt:

$$\text{Intensität } I \propto |\Psi_I + \Psi_{II}|^2 \propto 1 + \cos\alpha(\vec{x}_S)$$

   e) Berechnen Sie nun die Änderung des Interferenzmusters für $\Phi_{\mathrm{mag}} \neq 0$ unter Zuhilfenahme der freien Wellenfunktionen und des Resultates aus Blatt 11, Aufgabe 2.d). Interpretation! Sind Eichfelder selbst beobachtbar? Betrachten Sie insbesondere den Fall $\frac{e\Phi_{\mathrm{mag}}}{\hbar c} \in 2\pi\mathbb{Z}$.

   Hinweis: Beachten Sie die unterschiedliche Wegparametrisierung durch den Winkel φ je nachdem, ob die Elektronenwelle über Schlitz I oder Schlitz II auf den Schirm trifft.