Aufgabe 1:

a) Wir erwarten Radialsymmetrie, weil auch die Ladungsdichte radialsymmetrisch ist. Formal zeigt man die Symmetrie des Betrags durch:

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \langle \vec{r}', \vec{r}' \rangle = O\vec{r} \cdot O\vec{r} = \langle O\vec{r}, O\vec{r} \rangle$$
$$= \langle \vec{r}, O^\dagger O\vec{r} \rangle = \langle \vec{r}, O^t O\vec{r} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = |\vec{r}|^2$$

Außerdem ist die Verteilung zeitunabhängig.

b)

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 4\pi \int_V \rho \mathrm{d}V$$

Aus den Symmetrieeigenschaften folgt:

$$4\pi R^2 E = 4\pi \int_V \rho \mathrm{d}V = 4\pi \int_V \mathrm{d}V \left[q\delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} \right]$$
$$= 4\pi q - 4\pi \int_V \mathrm{d}V \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} = 4\pi q - 4\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 \sin\vartheta \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$$
$$= 4\pi q - 4\pi \cdot 2\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta \left[-\frac{q\, e^{-\frac{2\,r}{a}} \left(\frac{4\,r}{a} + \frac{4\,r^2}{a^2} + 2 \right)}{8\,\pi} \right]_0^R$$
$$= 4\pi q + 4\pi \frac{1}{4} \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta \left[q\, e^{-\frac{2\,R}{a}} \left(\frac{4\,R}{a} + \frac{4\,R^2}{a^2} + 2 \right) - 2q \right]$$
$$= 4\pi q + 4\pi \frac{2}{4} \left[q\, e^{-\frac{2\,R}{a}} \left(\frac{4\,R}{a} + \frac{4\,R^2}{a^2} + 2 \right) - 2q \right] = 4\pi q\, e^{-\frac{2\,R}{a}} \left(\frac{2\,R}{a} + \frac{2\,R^2}{a^2} + 1 \right)$$
$$\Rightarrow E = 2q\, e^{-\frac{2\,R}{a}} \left(\frac{1}{aR} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2R^2} \right)$$

c)

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho = -4\pi \left(q\delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} \right) = \Delta\Phi_1(\vec{r}) - \Delta\Phi_2(\vec{r})$$
$$\Delta\Phi_1(\vec{r}) = -4\pi q \delta^{(3)}(\vec{r}) \Rightarrow \Phi_1 = \frac{q}{|\vec{r}|}$$
$$\Delta\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r\Phi_2) = -\frac{4q}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$$
$$\Rightarrow r\Phi_2 = \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{r'} \mathrm{d}r'' r'' \frac{4q}{a^3} e^{-\frac{-2r''}{a}}$$
$$r\Phi_2 = q \left[\left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{r}{a} - 1 \right]$$

d)

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\Phi = q e^{-\frac{2r}{a}} \left[\frac{2}{a^2} + \frac{2}{ar} + \frac{1}{r^2} \right] \vec{e}_r$$

e)

$$\operatorname{div} \vec{E}_{si} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \vec{E}_G \Rightarrow \vec{E}_{si} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{E}_G$$
$$\vec{E}_G(a) = \frac{5q}{a^2} e^{-2} = 1.16 \cdot 10^7 \underbrace{g^{1/3} cm^{-1/2} s^{-1}}_{\text{dynesu}}$$

Gauß	SI
$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$	$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$E(r) = \frac{Q}{r^2}$	$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Aufgabe 2:

a)

$$\int \mathrm{d}^3x\, \delta^{(3)}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r\frac{1}{r}\delta(r)\delta(z)\delta(\varphi) = 1$$

b)

$$\frac{1}{r}\partial_r^2 rG = \frac{1}{r}\delta(r)$$

$$0 = \Delta G = \frac{1}{r}\partial_r r\partial_r G \Rightarrow G(r) = c_1 \ln r + \widetilde{c}_0 = c_1 \ln \frac{r}{c_0}$$

$$\int_{Kreis} \mathrm{d}^2x \Delta G = \int_{\partial Kreis} \mathrm{d}\epsilon \vec{\nabla} G = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi R \frac{\partial}{\partial r} G\big|_{r=R} = 2\pi c_1 = 1$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{c_0}$$

c) Wir machen uns hier den Satz von Gauß und ein paar Symmetrieargumente zu Nutze. Schließen wir nänmlich einen Abschnitt des unendlich langen, geladenen Drahts in einen Zylinder ein, dessen Achse auch dem Draht liegt, so sind Boden- und Deckelfläche aus Symmetriegründen (Feld muss radial vom Draht laufen) frei von Feldkomponenten, die senkrecht zur Oberfläche stehen. Es ist also:

$$\int_{Zyl} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\int_{Deckel} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}_{0} + \underbrace{\int_{Boden} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}_{0} + \int_{Mantel} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \mu \cdot h$$

$$\Rightarrow E\ 2\pi r h = \mu h$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\mu}{2\pi r}\vec{e}_r$$