

**Aufgabe 1:**

- a) (Translationsinvarianz in x-y-Richtung, Spiegelsymmetrie)  $\vec{E}$  muss symmetrisch zur Plattenebene sein und darf nur senkrecht zur Platte stehen, weil es sonst ausgezeichnete Raumrichtungen gäbe. Gleichzeitig darf aus dem selben Grund die Feldstärke nur von  $z$  abhängen. Es ist also

$$\vec{E} = E(z)\vec{e}_z \quad , \quad E(-z) = -E(z)$$

- b) Wir benutzen den Gaußschen Satz der E-Statik:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi \int_V \rho \, dV$$

Jetzt packen wir einen Teil der Platte in eine Box der Kantenlänge  $l$  (kürzt sich eh raus) ein (Zylinder ginge genauso, aber Box ist einfacher) und erhalten

$$2l^2 E(z) = 4\pi l^2 \sigma$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \pm 2\pi\sigma\vec{e}_z$$

Das folgt daraus, dass in den Seitenflächen keine senkrechten Feldkomponenten existieren.

- c) Innenraum:

$$\vec{E}_i = 2\pi(\sigma_1 - \sigma_2)\vec{e}_z$$

Außenraum:

$$\vec{E}_a = \pm 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)\vec{e}_z$$

Spezialfall  $\sigma_1 = -\sigma_2$ :

$$\vec{E}_i = 4\pi\sigma_1\vec{e}_z \quad , \quad \vec{E}_a = 0$$

**Aufgabe 2:**

Wir benutzen wieder wie immer die üblichen Symmetrieargumente.

- a) Die Ladung sitzt homogen verteilt auf der Oberfläche:

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(R - r)$$

Wir erhalten also aus dem Gaußschen Satz der E-Statik für den Innenraum  $\vec{E} = 0$  und für den Außenraum

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_V \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(R - r) dV = 4\pi Q$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

- b)  $\rho(r) = \mu r^n, n > -3$  Außenraum wie oben  $\vec{E}(r) = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ . Selbe Methode wie oben für Innenraum:

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_V \mu r^n \, dV$$

$$\Rightarrow r^2 E(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^r dr' \mu r'^n r'^2 \sin \vartheta = 4\pi \int_0^r dr' r'^{n+2} = 4\pi \mu \frac{r^{n+3}}{n+3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = 4\pi \mu \frac{r^{n+1} \text{(s.u.)}}{n+3} \stackrel{\downarrow}{=} 4\pi Q \mu \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}$$

$$E(R) = 4\pi Q = 4\pi\mu \frac{R^{n+1}}{n+3} \Rightarrow \mu = \frac{Q(n+3)}{R^{n+1}}$$

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \Phi = - \int dr E(r)$$

$$\Phi(r) = \int d^3 r' \frac{\rho(r')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{(n+2)R} \left[ (3+n) - \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \right] & r < R \\ \frac{Q}{r} & r > R \end{cases}$$

### Aufgabe 3:

a)

$$E = \frac{1}{8\pi} \int |E|^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int d^3 x - (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{E} = \frac{1}{8\pi} \int d^3 x \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{8\pi} \int d^3 x \Phi(x) \rho(x)$$

$$\Rightarrow E = \frac{3Q^2}{5R} = mc^2 \Rightarrow R = \frac{3}{5} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)$$

$$[m] = M ; [c] = \frac{L}{T} ; [e^2] = ?? \quad [F] = e[E] \Rightarrow [e] = \frac{[F]}{[E]} = \frac{M \frac{L}{T^2}}{[E]}$$

$$[\Phi] = \frac{[e]}{L} \Rightarrow [E] = \frac{[e]}{L^2} \Rightarrow [e]^2 = M \frac{L^3}{T^2}$$

$$\Rightarrow l_c = e^2 m^{-1} c^{-2} = \frac{e^2}{mc^2}$$

$$L = [e^2]^\alpha [m]^\beta [c]^\gamma = M^2 \frac{L^{3\alpha}}{T^{2\alpha}} \cdot M^\beta \cdot \frac{L^\gamma}{T^\gamma}$$

$$= \frac{M^{\alpha+\beta} L^{3\alpha+\gamma}}{T^{2\alpha+\gamma}} \stackrel{!}{=} L$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = 1 ; \gamma = -2 \\ \gamma = -2\alpha \\ \beta = -1 \end{array}$$

b)

$$R_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{mc^2} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{3}{5} \alpha \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{3}{5} \frac{1}{137} \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.511 \text{ MeV}} = 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$