Aufgabe 1:

a)

$$\vec{d} = \int \mathrm{d}^3x\vec{x}\rho(\vec{x})$$

$$\rho(\vec{x}) \mapsto \rho(\vec{x}-\vec{a})$$

$$\vec{d'} = \int \mathrm{d}^3r\vec{x}\rho(\vec{x}-\vec{a}) \quad ; \quad \vec{y} := \vec{x}-\vec{a}$$

$$= \int \mathrm{d}^3y(\vec{y}+\vec{a})\rho(\vec{y}) = \underbrace{\int \mathrm{d}^3y\ \vec{y}\rho(\vec{y})}_{=\vec{d}} + \vec{a}\underbrace{\int \mathrm{d}^3y\ \rho(\vec{y})}_{=Q=0}$$

b)

$$\vec{R}_+ = \frac{1}{Q_+}\int \mathrm{d}^3x\ \vec{x}\rho(\vec{x})$$

$$\vec{d} = \int \mathrm{d}^3x\ \vec{x}\rho(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3x\ \vec{x}(\rho_+ + \rho_-) = \vec{R}_+Q_+ + \vec{R}_-Q_-$$

c)

$$\vec{d} = -e\frac{-l}{2} + e\frac{l}{2} = el = \ldots = 6.1\cdot 10^{-18}\mathrm{esu}\cdot\mathrm{cm} \qquad (l = 1.28\mathring{A}\ ,\ e = 4.8\cdot 10^{-10}esu)$$

$$Q_+ = 18e = -Q_-$$

$$\Rightarrow |\vec{d}| = 18e|\vec{R}_+ - \vec{R}_-|$$

$$\vec{R}_\pm = \frac{1}{Q_\pm}\int \mathrm{d}^3x\ \vec{x}\rho_\pm(\vec{x}) \quad ; \quad \begin{aligned}\rho_+(\vec{x}) &= e\delta(\vec{x}) + 17e\delta(\vec{x}-\vec{l})\\ \rho_-(\vec{x}) &= -18e\delta(\vec{x}-\vec{l})\end{aligned}$$

$$\vec{R}_+ = \frac{1}{Q_+}\int \mathrm{d}^3x\ (e\delta(\vec{x}) + 17e\delta(\vec{x}-\vec{l})) = \frac{17}{18}\vec{l}$$

$$\vec{R}_- = \vec{l}$$

$$\vec{d} = el$$

d) Fallunterscheidung danach noch

$$\Rightarrow d = 18e(R_+ - R_-)$$

$$R_- > R_+ :\ R_- = \frac{d + Q_+R_+}{Q_+} = \frac{1.03\cdot 10^{-18}\mathrm{esu}\cdot\mathrm{cm} + 18\cdot 4.8\cdot 10^{-10}\cdot 1.209\cdot 10^{-8}\mathrm{esu}\cdot\mathrm{cm}}{18\cdot 4.8\cdot 10^{-10}\mathrm{esu}} = 1.22\mathring{A}$$

$$\Delta_- = 0.06\mathring{A}$$

Aufgabe 2:

$$\Delta\Phi = 0$$

$$(\Delta_r + \Delta_{\vartheta,\varphi}R(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = 0$$

$$\Delta_{\vartheta,\varphi}Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = cY_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$$q_{lm} = \int Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi'){r'}^l\rho(\vec{x}')\mathrm{d}^3x'$$

a)

$$q_{lm} \sim \int \mathrm{d}^3x\ r^l \rho(\vec{x}) Y^*_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

es sei $q_{lm} = 0$ für alle $l < L$ bzw. $q_{lm} \neq 0$ zu zeigen: $q'_{lm} = q_{lm}$ Unter Vorbehalt:

$$q'_{lm} \sim \int \mathrm{d}^3x\ \underbrace{|\vec{x} - \vec{a}|^L}_{|x|^L + c_1|x|^{L-1} + \ldots + c_0} \rho(\vec{x}) Y^*_{Lm}(\vartheta', \varphi')$$

b) (i)

$$\rho = \rho(r, \vartheta)$$

$$Q_{lm} \int r^2 \mathrm{d}r \int \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta \int \mathrm{d}\varphi\ r^l \rho(r, \vartheta, \varphi) Y^*_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$Q_{lm} \propto \int \mathrm{d}\varphi\ Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ e^{im\varphi} \propto \delta_{m,0}$$

$$Q_{lm} = \delta_{m,0} Q_{l0}$$

(ii)

$$\rho = \rho(\|\vec{r}\|)$$

$$Q_{lm} \propto \int \mathrm{d}\Omega\ Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{4\pi} \int \mathrm{d}\Omega\ Y^*_{00}(\vartheta, \varphi) Y_(\vartheta, \varphi) \propto \delta_{l,0}\delta_{m,0}$$

(iii) ähnlich a)

$$e^{im\varphi} = e^{-im\varphi}$$

Aufgabe 3:

a)

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\Phi_{1,2}(\vec{x}) = \frac{-q}{r_{1,2}} \quad , \quad r^2_{1,2} = x^2 + y^2 + (z \pm a)^2$$

$$\Phi_3(\vec{x}) = \frac{2q}{r}$$

b) Der Monopol verschwindet, weil die Gesamtladung 0 ist.

$$Q = 0 = 2q - q - q$$

Der Dipol verschwindet, weil die beiden Dipole $\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_3$, $\Phi_2 \leftrightarrow \Phi_3$ sich gegenseitig aufheben (Dipolpotential ist linear in $\vec{d}$).

$$\vec{d} = 0$$

Der Quadrupol ist:

$$Q^{ij} = \int \mathrm{d}^3x\ \rho(\vec{x}) \left(3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}\right)$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\ \rho(\vec{x})(3\vec{x} \otimes \vec{x} - r^2 \mathbb{E}) \quad , \quad (\vec{x} \otimes \vec{x})_{ij} = x_i x_j$$

$$\sum Q^{ii} = 0 = \mathrm{Spur}\, Q \quad , \quad Q^{ij} = Q^{ji} \quad , \quad Q^t = Q$$

$$Q_{ij} = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Das folgt mit $\rho \propto \delta(x)\delta(y)$ und $\delta(x) = 0$ für alle Komponenten, in denen x vorkommt (analog für y). Desweiteren $Q^{11} = Q^{22}$, weil x und y gleichwertig sind.

$$Q^{33} + Q^{11} + Q^{22} = 0$$

$$\Rightarrow Q^{33} = -2Q^{11}$$

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(x_1)\delta(x_2)\left[2\delta(x_3) - \delta(x_3 - a) - \delta(x_3 + a)\right]$$

$$Q^{11} = \int \mathrm{d}^3x\ \rho(\vec{x})\left(3(x^1)^2 - r^2\right) = 2qa^2$$

$$Q = 2qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = Q$$

c)

$$\Phi(\vec{x}) \approx \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{Q_{ij}x^i x^j}{r^5} = \frac{qa^2}{r^5}\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

d) i)

$$Q_{lm} \propto \delta_{m,0} \quad , \quad Q_{lm} = \delta_{l,0}Q_{l,0}$$

$$\rho(\vec{x}) = -\frac{q}{r^2}\delta(\varphi)\left[\delta(r-a)\delta(\cos\vartheta - 1) + \delta(r-a)\delta(\cos\vartheta + 1) - 2\delta(r)\delta(\cos\vartheta)\right]$$

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_0^r r^2\,\mathrm{d}r \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\vartheta\ r^l \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ r^l \rho(\vec{x}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$= \ldots = -qa^l\delta_{m0}\left(1 + (-1)^l - 2\delta_{l0}\right)$$

$$Q_{00} = 0 \quad , \quad Q_{10} = 0 \quad , \quad Q_{20} = 2qa^2$$

e)

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} Q_{l0}\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta) = -\frac{2q}{r}\sum_{n-1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\vartheta) \approx= -\frac{2qa^2}{r^3}P_2(\cos\vartheta) + \ldots$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

f)

$$\Phi_{exakt} = -\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{2q}{r} = q\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar}}\right] \quad , \quad \vartheta = 0$$

$$\Phi_{Qu} = \frac{2a^2q}{r^3}$$

$$\Phi_{Qu} = 0.99\Phi_{exakt}$$

$$0.99 \overset{!}{=} \frac{\Phi_{Qu}}{\Phi_{exakt}} = 1 - \frac{a^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\left|\frac{a}{r}\right|^4\right)$$

$$\Rightarrow r \approx 10a \quad , \quad (r = 0.81a)$$