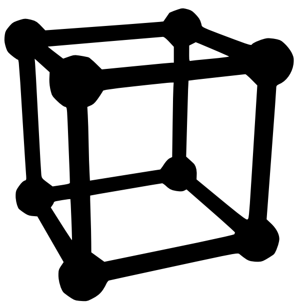
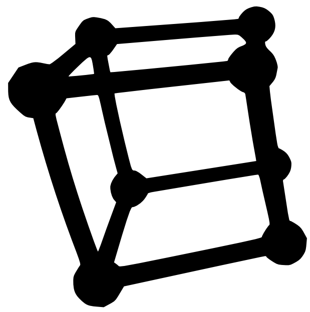
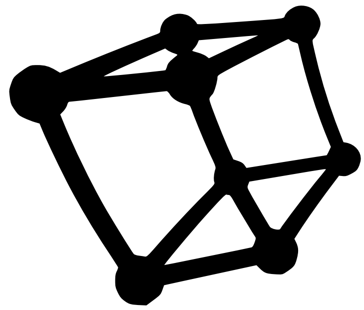
Aufgabe 1:



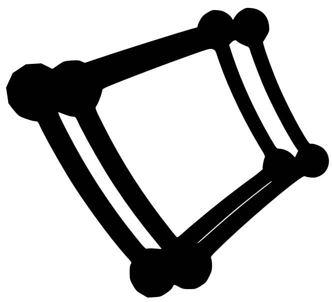
$v = 0$



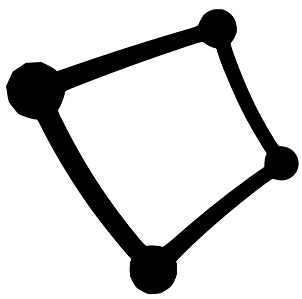
$v = 0.5c$



$v = 0.833c$



$v = 0.99c$



$v \approx c$

Die Bilder wurden erzeugt mit Lightspeed und Potrace.

Aufgabe 2:

a)

$$\Lambda(A' \to O)\Lambda(A \to A')\Lambda(O \to A) = \boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow \Lambda(A \to A') = \Lambda^{-1}(A' \to O)\Lambda^{-1}(O \to A) = \Lambda(O \to A')\Lambda(A \to O)$$

$$\Lambda(A \to O) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(O \to A') = R^T(\varphi)\Lambda(O \to A)R(\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta\cos\varphi & -\gamma\beta\sin\varphi & 0 \\ -\gamma\beta\cos\varphi & \gamma\cos^2\varphi + \sin^2\varphi & (\gamma-1)\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ -\gamma\beta\sin\varphi & (\gamma-1)\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi + \gamma\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(A \to A') = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2\cos\varphi) & \gamma\beta(1-\cos\varphi) & -\gamma\beta\sin\varphi & 0 \\ \gamma\beta(\gamma\cos\varphi\,(\cos\varphi - 1) + \sin^2\varphi) & \gamma(\gamma\cos\varphi\,(\cos\varphi - \beta^2) + \sin^2\varphi) & (\gamma-1)\cos\varphi\,\sin\varphi & 0 \\ -\beta\gamma\sin\varphi\,[\gamma + (1-\gamma)\cos\varphi] & -\gamma\sin\varphi\,[\beta^2\gamma + (1-\gamma)\cos\varphi] & \cos^2\varphi + \gamma\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \ll 1 : \Lambda(A \to A') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma\beta\varphi & 0 \\ 0 & 1 & (\gamma-1)\varphi & 0 \\ -\gamma\beta\varphi & (1-\gamma)\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir interpretieren nun die Glieder Λ_{ij} $i,j = 2,3$ als Drehung um $\delta\varphi = (\gamma - 1)\varphi$:

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\gamma-1)\varphi \\ (1-\gamma)\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Die Glieder Λ_{ij} $i,j = 1,3$ interpretieren wir als Boost in y-Richtung mit $\delta\vec{\beta} = \gamma\beta\varphi\vec{e}_y$

b) Klassisch würde ein Vektor beim Übergang von A zu A' um den Winkel φ gedreht. Mit der hergeleiteten Transformation, wird der Vektor allerdings um den zusätzlichen Winkel $\delta\varphi$ gedreht und mit $\delta\vec{\beta}$ geboostet.
Anschaulich: Der Spin (Vektor) eines Elektrons. Das Elektron bewegt sich (zur Mitte beschleunigt) auf einer Kreisbahn um den Kern. Im Zeitraum δt dreht sich die Geschwindigkeit um den Winkel φ weiter. Klassisch würde man erwarten, dass sich der Spin ebenfalls um φ dreht, aber wie wir gesehen haben, dreht er sich eben gerade um $\varphi' = \varphi + \delta\varphi$. Er präzediert.